解答

(1)

$$t=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=\frac{2}{\sin2\theta}$$

$\frac{\pi}{12}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ より　$\frac{\pi}{6}\leqq2\theta\leqq\frac{2}{3}\pi$

これより　$\frac{1}{2}\leqq\sin2\theta\leqq1$

よって　$2\leqq t\leqq4$

(2)

$$y=\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^2-2-a\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)$$
$$=t^2-at-2$$

(1)より　$2\leqq t\leqq4$ における最大・最小を考える

最大について

i) 軸 $\frac{a}{2}<3\iff a<6$

$t=4$ のとき　最大値　$14-4a$

ii) 軸 $\frac{a}{2}=3\iff a=6$

$t=2,4$ のとき　最大値　-10

iii) 軸 $\frac{a}{2}>3\iff a>6$

$t=2$ のとき　最大値　$2-2a$

最小について

i) 軸 $\frac{a}{2}<2\iff a<4$

$t=2$ のとき　最小値　$2-2a$

ii) $2\leqq$ 軸 $\frac{a}{2}\leqq4\iff4\leqq a\leqq8$

$t=\frac{a}{2}$ のとき　最小値　$-\frac{a^2}{4}-2$

iii) $4<$ 軸 $\frac{a}{2}\iff a>8$

$t=4$ のとき　最小値　$14-4a$

構想

・単なるグラフの問題である.

・(2)で(1)を利用することは容易に思いつくであろう.

・「とり得る値の範囲」と「最大値，最小値を求める」ことは厳密には異なる.

・置換により，より簡単な式にしてしまおう，という典型問題である.

・場合分けが発生することも事前に予測できなければならない.

検証

(1)では，相加・相乗平均の利用も考えられるが，

構想で述べたように，この問いは単に最大値，最小値を求めるのではないことと，

範囲の「両端」を求める必要があることから，利用度は低い。

他には，グラフの利用(微分→増減表)などが考えられる.

解答では，三角関数の特性を活かした解法を示している.

(2)では(1)を利用することは明らか.

単なる二次関数の問題に帰着されるので，受験生は必ず得点しなければならない問いと言える.

解法知識・技術

・「相加平均・相乗平均」

$a>0$，$b>0$ のとき，　$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ (等号が成り立つのは $a=b$ のとき)

最大値，最小値を求める問題では，「等号成立条件」の確認

(一般的に，最大値，最小値をとるときは，等号が成立している)

・構想下線部(　　　　)について

例)

「x の最小値が 2」…あくまでも局所的な表現(連続性は保証されていない).

「x の範囲が $x\geqq2$」…2 以上の値すべてを取りうる.

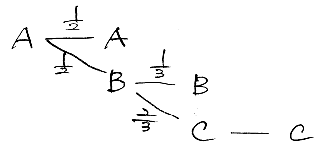
・二次関数の最大，最小→範囲と軸の位置関係による場合分けは必須.

和歌山県立医科大学 2010 年度前期【2】 C

解答

(1)

状態変化をまとめると以下のようになる



状態	n秒後		$(n+1)$秒後
A	P_n	$\xrightarrow{\frac12}$	P_{n+1}
B	Q_n	$\xrightarrow{\frac12}$ $\xrightarrow{\frac13}$	Q_{n+1}
C	R_n	$\xrightarrow{\frac23}$ $\rightarrow$	R_{n+1}

$P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n$ — ①

$Q_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{3}Q_n$ — ②

$R_{n+1}=\frac{2}{3}Q_n+R_n$ — ③

又 $P_n+Q_n+R_n=1$ — ④

$P_1=\frac{1}{2},\ Q_1=\frac{1}{2},\ R_1=0$ — ⑤

①⑤より

$P_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

②より $Q_{n+1}=\frac{1}{3}Q_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$2^{n+1}\cdot Q_{n+1}=\frac{2}{3}\cdot 2^n\cdot Q_n+1$

$S_n=2^n\cdot Q_n$ とおいて

$$\begin{cases} S_{n+1}=\frac{2}{3}S_n+1 \\ S_1=2\cdot Q_1=1 \end{cases}$$

$S_{n+1}-3=\frac{2}{3}(S_n-3)$

$S_n-3=(-2)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$S_n=(-2)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+3$

これより $Q_n=\frac{S_n}{2^n}=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

④より

$R_n=1-(P_n+Q_n)$

$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2)

$Q_m=Q_n$ とする．

$\left(\frac{1}{2}\right)^m-\left(\frac{1}{3}\right)^m=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$

両辺に $2^{m+n}\cdot 3^{m+n}$ をかけて整理すると

$2^{m+n}\cdot(3^{m+1}-3^{n+1})=3^{m+n-1}\cdot(2^m-2^n)$

2と3は互いに素，また $m\neq n$ より

$2^m-2^n=2^{m+n}$

$(2^m+1)(2^n-1)=-1$

となるが $2^m+1>0,\ 2^n-1>0$ より等号は成立しない

従って $Q_m=Q_n$ となることはない

(3)

$m=n=1$ のとき成立する

構想

・「n秒後の確率 P_n」を求める問題→直接求めるor漸化式．まずは，条件を正確に理解し，フローチャートで整理・図示してみよう．

・P_n，Q_n ではなく，R_n から求めさせる理由に注目．

・「～となることはあるか」「～の真偽を判定し，証明，又は反例を示せ」といった問いの場合は，当然，まず結果の予想が必要である．

・(2)では「異なる」とあるが，(3)では「異なる」とないことにも注目しよう．

検証

(1)では，フローチャートを見れば，漸化式が容易につくれるのは明らか。なお，① R_n を直接求める，② P_n，Q_n より求める方法があるが，ここでは①のほうが楽であろう．

(2)は，P_n，Q_n，R_n は共に減少数列であり，このことに気付けば，(2)はすんなり解ける．(ただし，解答には，あえてそういった特徴に触れることなく証明する方法を示した．)

(2), (3)ともに，「条件」を理解し，具体的に考えることができれば解けるが，そうでなければ難しい問題だ．

解法知識・技術

・整数の性質…両辺の倍数に注目する．

・増加数列⇔ $a_{n+1}-a_n>0$　または，$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ (ただし，$a_n>0$)

減少数列⇔ $a_{n+1}-a_n<0$　または，$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ (ただし，$a_n>0$)

(1)の Qn を求める別解

k秒後に A→B と状態変化し n秒後に B である確率を $Q_k(n)$ とすると

$Q_k(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$

従って $Q_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$

⋮

以下省略

(2)の別解

$Q_n-Q_{n+1}=3\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

$-3\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}$

$=3\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}$

>0

より Q_n は減少数列

従って $Q_m=Q_n$ となることはない

解答

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと

$f(1)=a+b+c=15$

$f(2)=4a+2b+c=33$ より

$b=18-3a$, $c=2a-3$ となり

$f(x)=ax^2+(18-3a)x+(2a-3)$

aは非負整数, $18-3a\geqq 0$, $2a-3\geqq 0$

これより $a=2,3,4,5,6$ ——①

次に

$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$

$=\sum_{k=1}^{n}\{ak^2+(18-3a)k+(2a-3)\}$

$=a\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(18-3a)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$
$\quad+(2a-3)\cdot n$

これをnで割ったときの商

$a\cdot\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)+(18-3a)\cdot\frac{1}{2}(n+1)$
$\quad+(2a-3)$

$=\frac{1}{3}a(n-1)(n-2)+9n+6$

が，すべての自然数nについて整数である為の必要十分条件は

aが3の倍数

であることである

①とあわせて $a=3, 6$

$f(x)=3x^2+9x+3$

又は

$f(x)=6x^2+9$

構想

・$f(x)=ax^2+bx+c$ とおいて，a, b, c の条件式を作る．整数条件があるので，不定方程式の可能性も考えなければならない．

・条件 $f(1)=15$，$f(2)=33$ を何の為に用いるのかは，すぐに理解できなければならない．

・$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$ は常に n で割り切れるという条件であるが，

① 和の公式を用いて，具体的に計算する

② $n=2$，$n=3$ などから必要条件を求め，十分性を確認する

といった方法を考えよう．②については，必要条件でかなり絞り込めた場合は，有力な方法である．

検証

・条件 $f(1)=15$ $f(2)=33$ は，文字消去に利用．

・解答では，上記構想の手法①を示した．しかし，a は非負整数であるという条件より，a が限定されてしまう(しかも，そんなに多くない)ので，すべての場合で題意を満たすかどうかの確認をしてもよい．

解法知識・技術

・$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=\sum_{k=1}^{n}f(k)$

解答

(1)

$f(x)=\cos x+(x+1)\sin x+1$

$f'(x)=-\sin x+\sin x+(x+1)\cdot\cos x$

$\quad=(x+1)\cdot\cos x$

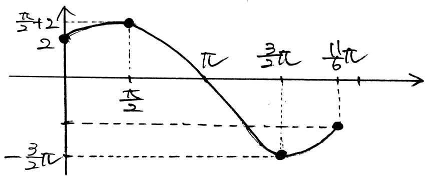
$f'(x)=0$ とすると　$x=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{2}\pi$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{2}\pi$		$\frac{11}{6}\pi$
$f'(x)$	/	+	0	−	0	+	/
$f(x)$	2	↗		↘		↗	

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+2$

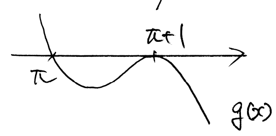
$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-\frac{3}{2}\pi$

$f\left(\frac{11}{6}\pi\right)=\frac{6\sqrt{3}+6-11\pi}{12}$　(<0)



(2)

$g(x)=-(x-\pi)\cdot\{x-(\pi+1)\}^2$



上のグラフより

$|g(x)|=\begin{cases}g(x) & (x\leqq\pi)\\ -g(x) & (\pi\leqq x)\end{cases}$

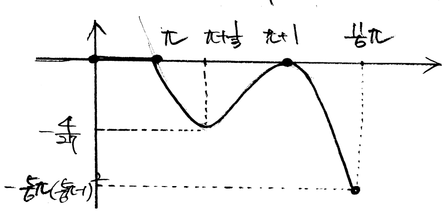
これより

$h(x)=\begin{cases}0 & (0\leqq x\leqq\pi)\\ g(x) & (\pi\leqq x\leqq\frac{11}{6}\pi)\end{cases}$

$g'(x)=\{x-(\pi+1)\}\{-3x+(3\pi+1)\}$

$g'(x)=0$ より　$x=\pi+1,\ \pi+\frac{1}{3}$

$g\left(\pi+\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{27}$



構想

・数Ⅲ微分法からの出題である

・グラフの概形の描画と，最大値・最小値を求める問題である。レベルは平易なので，得点しなければならないことを認識しよう。

・概形を求める問題では，一般的には，①定義域・対称性，②極値，③凹凸，④極限・漸近線，⑤切片　を求める必要があるが，問題により，これらのすべての要素を必要としないものもある．なお，問題を解く手段として，補助的にグラフを描く場合は，必要な要素のみを盛り込んだグラフでよい．

・(3)で $|f(x)|$ の絶対値を外すためには，$f(x)$ の符号が必要…(1)の結果より得られる

検証

$f(x)$は，整関数と三角関数が混じったものである．

こういった場合は，式の様子こそ複雑に感じるが，増減表を書いてみると，意外に簡単(または，グラフ自体が単調)になることが多い。本問も例にもれず，導関数は非常にシンプルである．$g(x)$，$h(x)$は 3 次関数なので，落ち着いて考えよう．

$k(x)$には，2 つの絶対値が存在するが，場合分けの範囲が同じなので難しくはない．

グラフの概形であるが，本問の場合は，問題のつながりを考えると上記構想での要素①②⑤程度でよいと思われる(実際，2 次導関数を計算しても，変曲点が具体的に求まらない)．

解法知識・技術

・$\{f(x)g(x)\}'=f(x)'g(x)+f(x)g(x)'$

・$|a|=\begin{cases}a & (a\geqq 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$

(3)

(1)より　$|f(x)|=\begin{cases}f(x) & (0\leqq x\leqq\pi)\\ -f(x) & (\pi\leqq x\leqq\frac{11}{6}\pi)\end{cases}$

以上のことより

i) $0\leqq x\leqq\pi$

$k(x)=\frac{f(x)+f(x)}{2}+0=f(x)$

ii) $\pi\leqq x\leqq\frac{11}{6}\pi$

$k(x)=\frac{f(x)-f(x)}{2}+g(x)=g(x)$

これまでのグラフを利用して

$x=\frac{\pi}{2}$ のとき　最大値 $\frac{\pi}{2}+2$

$x=\frac{11}{6}\pi$ のとき　最小値 $-\frac{5}{6}\pi\left(\frac{5}{6}\pi-1\right)^2$